

На правах рукописи

Сивцев Петр Васильевич

**Численное исследование некоторых прикладных  
проблем расчета напряженно-деформированного  
состояния**

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Якутск – 2018

Работа выполнена на научно-исследовательской кафедре вычислительных технологий Института математики и информатики Северо-Восточного федерального университета имени М.К. Аммосова.

Научный руководитель: **Вабищевич Петр Николаевич**  
доктор физико–математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Ильин Валерий Павлович**,  
доктор физико–математических наук, профессор  
ФГБУН «Институт вычислительной математики и  
математической геофизики Сибирского отделения  
Российской академии наук», г. Новосибирск  
**Савенков Евгений Борисович**,  
кандидат физико–математических наук,  
ФГУ «Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук», г. Москва

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)  
федеральный университет», г. Казань

Защита состоится «11» июля 2018 года в «16:00» часов на заседании диссертационного совета Д 212.306.04 при СВФУ им. М.К. Аммосова, расположенном по адресу: 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке СВФУ им. М.К. Аммосова, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58 и на сайте университета [https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/strukturnye-podrazdeleniya/unir/otdel-dissertatsionnykh-sovetov/disser\\_soiskateli/](https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/strukturnye-podrazdeleniya/unir/otdel-dissertatsionnykh-sovetov/disser_soiskateli/).

Автореферат разослан «7» мая 2018 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
д.ф.-м.н.



Саввинова Н.А.

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** За последний век бурное развитие техники неизбежно выдвинуло перед механикой деформируемого твердого тела множество разнообразных задач, связанных с внедрением новых материалов - сплавов, композитов, высокопрочных волокон и применением традиционных материалов в экстремальных условиях - высоких температур и давлений. Вследствие чего появилась необходимость в рассмотрении большого ряда моделей деформируемого тела, широком применении в инженерных расчетах теории термоупругости, пороупругости, пластичности, вязкоупругости и механики разрушения. Основой всех вышеперечисленных задач является теория упругости.

Круг задач расчета напряженно-деформированного состояния диктуется практическими запросами и постоянно расширяется. Некоторые из этих задач еще ждут своего решения. Важной задачей промышленности является уменьшение веса изделий массового производства, что может привести к значительной экономии. Этого можно достичь лишь в результате тщательного анализа их напряженного состояния. Знание подробной картины распределения напряжений особенно важно для правильного конструирования быстроходных двигателей внутреннего сгорания, паровых и газовых турбин, самолетов, морских кораблей, роботов и других машин и сооружений.

В современных конструкциях наряду с материалами, принимаемыми за однородные и изотропные, в производстве используются и анизотропные материалы, отличительной особенностью которых является резкое различие в упругих свойствах для разных направлений. Примером анизотропного материала может служить натуральная древесина; общеизвестно, что модуль упругости древесины при растяжении вдоль волокон значительно больше соответствующего модуля при растяжении поперек волокон. Помимо древесины анизотропными являются кристаллы, некоторые горные породы, а также синтетические материалы, такие как авиа-фанера, текстолит, дельта-древесина и др.

При описании деформаций за пределами теории упругости в зависимости от возможной величины неупругих деформаций можно говорить о пластичности или хрупкости материала. Пластичностью называется способность твердого тела получать под действием нагрузок такие деформации, которые остаются после удаления внешних воздействий. Материал с низкой пластичностью не может получать существенные пластические деформации и будет разрушаться с образова-

нием хрупких трещин. Свойством пластичности обладает большинство металлов, практическую значимость которых сложно переоценить. Теория пластичности является частью механики деформируемых твердых тел и основана прежде всего на экспериментальных данных: на базе испытания лабораторных образцов устанавливаются законы процессов пластического деформирования материалов. Также отметим, что теория пластичности позволяет рассмотреть тело в предельном состоянии и следовательно имеет важные приложения при решении вопросов прочности и долговечности различных инженерных объектов.

Заметим, что при возникновении деформаций также возникают изменения поля температурного распределения, и наоборот, изменение поля температур сопровождается деформациями, возникающими за счет термического расширения. При решении задач расчета напряженно-деформированного состояния тела в случае неизотермических деформаций используются модели термоупругости. Основным уравнением термоупругости является уравнение баланса, которое вытекает из закона сохранения энергии, включающего механическую и тепловую составляющие. Таким образом, теория термоупругости является ни чем иным, как обобщением теории упругости. В классической теории термоупругости имеет место взаимодействие деформации и температурного поля, выраженное в уравнении теплопроводности и в уравнениях описывающих распределение деформаций в упругом пространстве под действием градиентов температуры. Термоупругость получила существенное развитие в связи с решением важных проблем, связанных с конструкцией реактивных и ракетных двигателей, ядерных реакторов и т.д.

Другой довольно распространенной и актуальной мультифизической теорией является теория пороупругости. Актуальность задачи обоснована наличием множества различных пористых объектов в природе, таких как грунты и камни, а также цветы, плоть и кости людей и животных. Отметим также примеры пористых материалов созданных человеком: это разновидности полиуретановой пены и фильтры наночистот. Задачей пороупругости является расчет напряженно-деформированного состояния пористого тела под действием давления жидкости текущей внутри пор. Динамическое или квази-стационарное взаимодействие жидкости и скелета пористого тела описывается связанными уравнениями для давления и перемещений.

Зарождение и становление теории упругости связано с именами великих ученых, таких как Р. Гук, Г. Ламе, Б. Сен-Венан, О. Л. Коши. Свой вклад в даль-

нейшее развитие теории деформируемого твердого тела, в виде исследования нелинейных и неоднородных свойств материалов различной природы под внешним воздействием разных сил и её строгого математического описания, внесли Р. Э. Мизес, М. Э. Био, В. Новацкий, С. Г. Лехницкий, С. П. Тимошенко, А. Ляв, Н. И. Мухелишвили. Одни из первых работ по численному расчету напряженно-деформированного состояния принадлежат А. Н. Коновалову, О. Зенкевичу, Б. Е. Победря, Р. Л. Тейлору, Т. Хьюзу, Х. К. Симо. На сегодняшний день численным расчетом напряженно-деформированного состояния занимаются многие ученые из разных стран. Основная часть работ относится к разрешению проблем возникающих при решении специфических прикладных задач расчета напряженно-деформированного состояния, оптимизации параллельных вычислений, применении многомасштабных методов и методов усреднения.

**Цель диссертационной работы** состоит в разработке вычислительных алгоритмов параллельной архитектуры для численного исследования некоторых прикладных проблем расчета напряженно-деформированного состояния. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие задачи:

- разработка вычислительных алгоритмов численного решения поставленных прикладных задач с учетом особенностей;
- апробация и оптимизация разработанных вычислительных алгоритмов и прикладного программного обеспечения;
- применение разработанных вычислительных алгоритмов в исследованиях проблем расчета напряженно-деформированного состояния.

**Научная новизна и практическая значимость.** Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

- Предложено решение проблемы сингулярности связанной с расхождением решения для напряжений на углах при уменьшении локального размера ячеек сетки;
- Разработан вычислительный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния композитного материала с использованием метода численного усреднения;
- Построен вычислительный алгоритм решения задачи линейной упругости анизотропного тела;
- На примере расчета напряженно-деформированного состояния керамической подложки с металлизацией под действием теплового потока реализован

вычислительный алгоритм решения задачи термоупругости;

- Сформулирована математическая модель и построен вычислительный алгоритм решения мультифизической нестационарной задачи термoporоупругопластичности с учетом фазового перехода.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Finite Difference methods, Theory and Applications: 6th International Conference, FDM 2014, Lozenetz, Bulgaria, 2014;
- IX Летняя школа-семинар студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов с международным участием "Математическое моделирование развития Северных территорий", Якутск, 2015;
- Sixth Conference on Numerical Analysis and Applications, Lozenetz, Bulgaria, 2016;
- Eighth Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena, Bulgaria, 2016;
- III Международная конференция "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования", Москва, 2016;
- The 11th International Conference on Large-Scale Scientific Computations LSSC'17, Sozopol, Bulgaria, 2017;
- International Conference "Multiscale methods and Large-scale Scientific Computing", Yakutsk, 2017;
- VIII Международная конференция по математическому моделированию (МКММ 2017), Якутск, 2017.

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 11 научных работ, в том числе – 10 статей в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 в списке литературы), из них – 6 статей в международных научных изданиях (работы 1, 3, 4, 5, 6, 7), включенных в систему цитирования Web of Sciences и Scopus, 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ [8].

**Личный вклад автора.** В работах, опубликованных в соавторстве, личный вклад диссертанта состоит в следующем: в работах [1, 6, 9, 10, 11] участвовал в постановке задачи и провел вычислительные расчеты напряженно-деформированного состояния; в работах [3, 4, 5, 7] автор внес основной вклад в постановку

задачи, разработал вычислительный алгоритм, численно его реализовал и провел анализ результатов вычислительных экспериментов. В работе [8] автор подготовил вычислительную реализацию — расчетный модуль в программе для ЭВМ. Подготовка к опубликованию полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта в работах [1, 3, 4, 5, 7] был определяющим.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертационной работы составляет 148 страниц, содержит 48 иллюстраций и 23 таблиц. Список литературы содержит 196 наименований.

Работа была поддержана Мегагрантом Правительства РФ 14.Y26.31.0013, грантами РФФИ 14-01-00785, 15-31-20856, 17-01-00689, грантом РНФ 17-71-20055.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель и задачи исследования, кратко излагается содержание диссертации по главам.

В **первой главе** рассматривается моделирование многомерных задач линейной упругости. Приводится общая постановка и вычислительный алгоритм решения стационарных задач линейной упругости однородного изотропного тела. На примере двумерной модельной задачи исследуется влияние размеров ячеек сетки и используемых конечных элементов на точность решения задачи. На примере модельной трехмерной задачи проводится тестирование различных комбинаций итерационных методов решения и предобуславливателей матриц систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Тестирование также включает вариацию числа используемых процессов, целью которой является определение масштабируемости задачи при использовании компьютеров параллельной архитектуры.

Рассматривается стационарная задача расчета напряженно-деформированного состояния линейно упругого изотропного тела в трехмерной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma$ . Модельная задача линейной упругости описывается уравнением равновесия в перемещениях  $\mathbf{u}$ :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{f}$  — вектор объемных сил,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжения, связь которого с вектором перемещений  $\mathbf{u}$  для изотропного тела описывается через обобщенный закон Гука,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda\varepsilon_v\mathbf{I}, \quad (2)$$

где  $\mathbb{C}$  — тензор упругости четвертого порядка,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор деформации, который при условии малых деформаций выражается как

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u}), \quad (3)$$

а  $\varepsilon_v$  — объемная деформация, которая равна следу матрицы тензора деформации,  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ламе, определяющие упругие свойства материала. Они также могут быть выражены через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

С учетом уравнений (2), (3) уравнение равновесия (1) может быть переписано в виде уравнения Ламе:

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (4)$$

Математическая модель также дополняется граничными условиями первого и второго рода, на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Перед построением конечно-элементной аппроксимации краевой задачи необходимо привести её к вариационному виду. Для этого определим гильбертово пространство Соболева  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  векторных функций, необходимое для построения вариационной формулировки задачи в перемещениях. После чего, определим пространства тестовых  $\mathbf{V}$  и пробных функций  $\hat{\mathbf{V}}$ .

Умножив (1) на  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  и проинтегрировав по частям, с учетом (5), получим

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_n\mathbf{v}ds, \quad (6)$$

где  $\mathbf{u} \in \hat{\mathbf{V}}$ . Далее, выделим в выражении (6) билинейную и линейную форму

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})d\mathbf{x}, \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma}_n\mathbf{v}ds.$$

Тогда мы получим следующую вариационную формулировку задачи: найти  $\mathbf{u} \in \hat{\mathbf{V}}$ , такую что

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (7)$$

Для вычислительной реализации задачи (7) строится дискретизация области с использованием стандартного метода Галеркина. Пространство  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  заменено конечномерным подпространством  $\mathcal{P}$ . Для дискретного вектора перемещения мы имеем разложение по узловым базисам  $\mathbf{u}_h = \sum_{l=1}^{dN} U_l \boldsymbol{\eta}_l$ , где  $d$  — размерность задачи,  $N$  — количество узлов триангуляции. Это приводит к линейной системе уравнений

$$\sum_{l=1}^{dN} \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_k) : \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_l) d\mathbf{x} \right) U_l = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_k d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta}_k d\mathbf{s} \quad (k = 1, \dots, dN). \quad (8)$$

Матрица коэффициентов (глобальная матрица жесткости)  $A = (A_{kl} \in \mathbb{R}^{dN \times dN})$  и правая часть  $\mathbf{b} = (b_k) \in \mathbb{R}^{dN}$  определяются как

$$A_{kl} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_k) : \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_l) d\mathbf{x} \quad \text{и} \quad b_k = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_k d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta}_k d\mathbf{s}, \quad (9)$$

Матрица коэффициентов является разреженной, симметричной и положительно определенной.

С точки зрения математического моделирования при программной реализации решения краевых задач для уравнений в частных производных можно выделить следующие шаги:

- сборка геометрии и генерация сетки;
- инициализация вариационной постановки задачи;
- связывание отдельных частей программы и переход к СЛАУ;
- решение СЛАУ и сохранение результатов;
- визуализация результатов.

При работе со сложной геометрией рекомендуется импортировать сетку из специализированных программ по генерации вычислительных сеток, таких как Gmsh и Netgen. Основная программа численной реализации конечных элементов подготовлена на языке C++ с использованием вычислительной платформы FEniCS. Она состоит из следующих частей: инициализация готовой сетки, включение уравнений, подготовка и решение СЛАУ и сохранение результатов. Визуализация результатов может выполняться с помощью встроенного визуализатора в

основном коде или при помощи использования программы научной визуализации ParaView.

**Задача 1.** Рассматривается модельная верификационная задача по расчету напряженно-деформированного состояния двумерной квадратной пластины с эллиптическим вырезом под действием всестороннего растяжения. Цель поставленной задачи состоит в том, чтобы получить численное решение задачи отличающееся от аналитически выведенного значения не более чем на величину заданной погрешности. Геометрическая постановка задачи представлена на рис. 1.

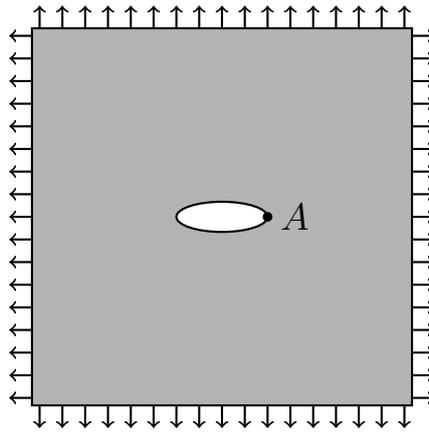


Рис. 1. Геометрическое представление постановки модельной двумерной задачи.

Значения напряжения и погрешности решения в точке  $A$ , аналитически равное 6 МПа, для разных сеток для первого и второго наборов конечных элементов представлены в табл. 1. Первый набор содержит конечные элементы Лагранджа первого порядка по перемещениям и нулевого для напряжений, тогда как второй набор включает конечные элементы на порядок выше.

По полученным результатам можно сделать вывод о том что для получения решения с хорошей точностью для первого набора конечных элементов потребуется более точная сетка. Что касается второго набора, то можно заметить хорошую точность решения на двух последних сетках.

**Задача 2.** Рассматривается трехмерная модельная задача по расчету напряженно-деформированного состояния куска круглой бесконечной цилиндрической трубы под действием внутреннего и внешнего давления. Цель задачи — проверить масштабируемость задачи линейной упругости при использовании многопроцессорной вычислительной техники и последовательности расчетных сеток, которые обеспечивают численное решение задачи отличающееся от аналитически выведенного значения не более чем на величину заданной погрешности. Геометрическая

Таблица 1. Значения компоненты напряжения  $\sigma_{11}(A)$  и погрешность для разных сеток для первого и второго набора конечных элементов.

	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3	Сетка 4	Сетка 5
Число узлов сетки	197	733	2 825	11 089	43 937
Количество ячеек	383	1 446	5 612	22 104	87 728
<b>Первый набор (<math>p_{10}</math>)</b>					
Значение напряжения, МПа	4.42	5.46	6.05	6.21	6.18
Погрешность, %	26.3	9.0	0.8	3.5	3.0
<b>Второй набор (<math>p_{21}</math>)</b>					
Значение напряжения, МПа	4.61	5.38	5.82	5.98	6.02
Погрешность, %	23.2	10.3	3	0.33	0.33

постановка задачи представлена на рис. 2.

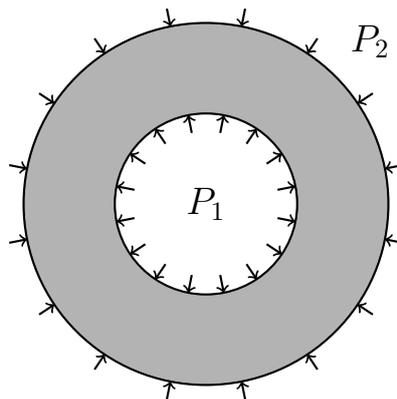


Рис. 2. Постановка модельной трехмерной задачи.

Результаты времени расчетов с использованием прямого метода и метода бисопряженных градиентов при использовании предобуславливателей `petsc_amg` (алгебраический многосеточный метод), встроенной в библиотеку `PETSc` и `ilu` факторизации матриц СЛАУ приведены в табл. 2. Из представленных результатов видно, что при последовательном увеличении числа используемых процессоров мы достигаем некоторого оптимального количества и дальнейшее увеличение приводит лишь к увеличению времени расчета за счет увеличения времени передачи сообщений между процессами. В данном случае оптимальным количеством используемых процессоров является 8. Также заметим, что при использовании оптимально подобранного итерационного метода мы получаем решение задачи примерно в два раза быстрее.

Таблица 2. Время расчета (сек.) модельной задачи для различного числа используемых процессоров при использовании стабилизированного метода бисопряженных градиентов для разных предобуславливателей и прямого метода.

Кол-во процессов	bicgstab		direct
	ilu	petsc_amg	
1	111.6	118.6	290.8
2	61.3	59.5	159.2
4	39.2	43.8	109.9
8	29.5	35.9	69.2
16	35.4	28.2	136.7
32	59.1	53.9	180.5
64	49.5	97.7	250.6
128	107.1	117.0	412.0

Во **второй главе** рассматривается численное моделирование прикладных проблем линейной упругости. На примере трехточечного изгиба железобетонного блока приводится вычислительная реализация решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния тела составленного из частей выполненных из различных материалов имеющих значительные отличия численных значений упругих параметров. Предлагается локальное изменение геометрии для разрешения особенности задачи. На основе решения двумерной задачи расчета напряженно-деформированного состояния бетона с включением стальных фибр демонстрируется возможность численного усреднения упругих параметров.

Объектом исследования является железобетонный блок с внутренним армированием. Геометрия бетонного блока, рельс, пресса, а также металлической арматуры и ее расположение внутри бетона, представлены на рис. 3. Такое расположение и размеры арматуры были предоставлены коллегами из Люблинского технического университета Польши. Трехточечный изгиб моделируется с включением плиты, рельс и пресса. На нижней поверхности рельс задается условие первого рода, которое фиксирует основание рельс на месте. Пресс моделируется в виде стального слитка, на верхней поверхности которого задается граничное условие второго рода, определяющее равномерно распределенное вертикальное давление.

Рассмотрим математическую модель описывающую напряженно-деформиро-

ванное состояние в расчетной области  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$  содержащей железобетонную плиту зажатую между прессом и рельсами, где  $\Omega_1$  — подобласть стальной арматуры в бетоне,  $\Omega_2$  — бетонная подобласть плиты,  $\Omega_3$  — пресс,  $\Omega_4$  — рельсы.

Главным отличием решения задачи в неоднородной области является наличие в уравнении Ламе (4) разрывных коэффициентов Ламе, которые в зависимости от области имеют различные значения

$$\mu = \mu_i, \quad \lambda = \lambda_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

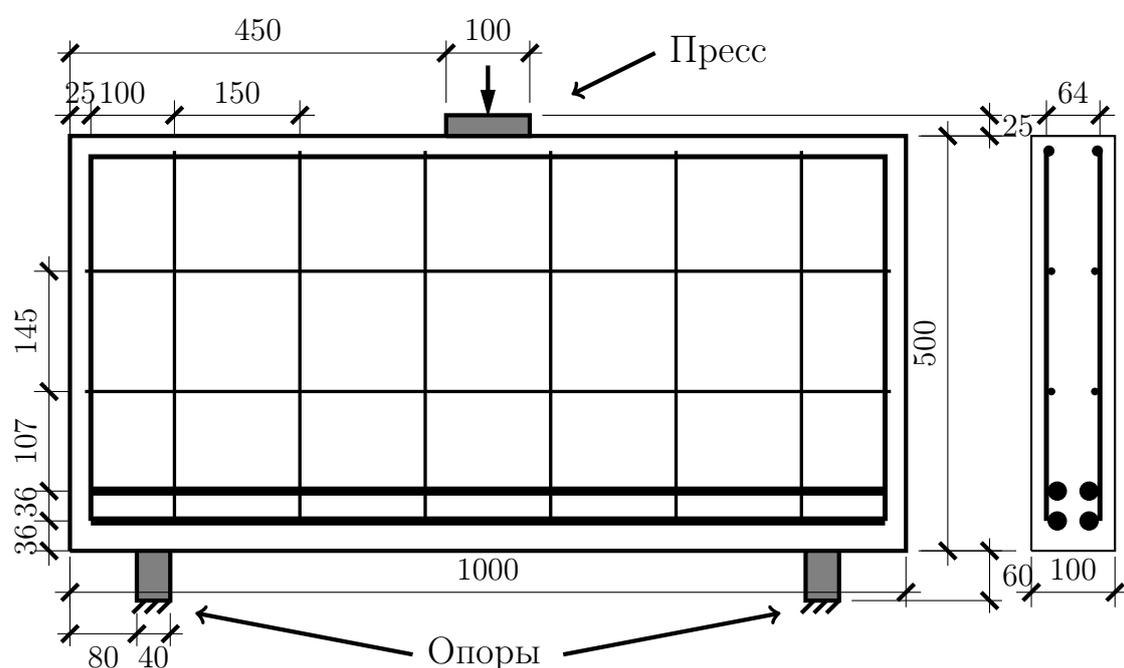


Рис. 3. Геометрические размеры и расположение стальной арматуры внутри бетона (размеры заданы в миллиметрах).

Для учета сингулярности задачи связанной с расхождением значений напряжений в пересечении плиты с рельсами и прессом было предложено 4 вида геометрий, которые показаны на рис. 4. Из представленных видов геометрии, вариант D является более близким к реальной геометрии стыка и самое главное такой вариант не содержит концентраторов напряжения.

На рис. 5 дана зависимость локального максимального значения напряжения по Мизесу от размера сетки. Можно заметить что для вариантов А, В и С локальное максимальное значение напряжения по Мизесу расходится. Тогда как для геометрии D наблюдается сходимость. Подобное поведение напряжения для

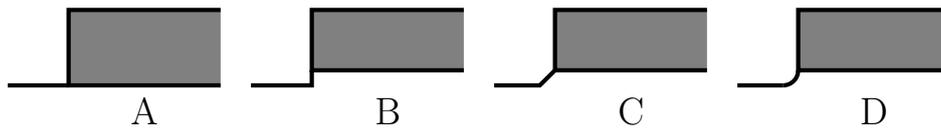


Рис. 4. Различные варианты моделирования стыка плиты с внешними объектами (серым цветом обозначен пресс).

вариантов А, В и С связано с наличием разрыва по перемещениям вдоль горизонтальной линии пересекающей угол.

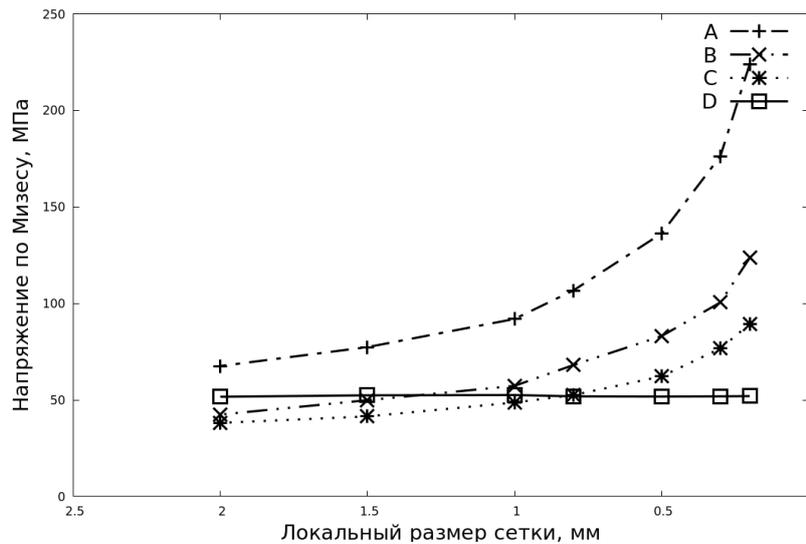


Рис. 5. Зависимость максимального значения напряжения от локального размера сетки.

Помимо армирования бетонных блоков металлическим каркасом улучшение упругих свойств конструкции можно добиться посредством добавления мелких частиц, таких как стальные и полипропиленовые фибры, равномерно распределенные по всему объему тела. При решении задачи с учетом всех включений возрастает вычислительная сложность задачи за счет применения очень подробной сетки. Для некоторого типа подзадач вместо учета всех включений можно обойтись решением задачи на более грубой сетке с использованием эффективных коэффициентов. Для вычисления эффективных коэффициентов используется метод численного усреднения на представительной квадратной области. Основной идеей численного усреднения является нахождение однородной среды эквивалентной исходному композитному материалу.

Для исследования метода расчета эффективных коэффициентов были рассмотрены 5 различных представительных областей с размерами сторон  $l = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  м. Объемная доля фибр варьировалась в следующем диапа-

зоне значений  $\varphi = 3.2\%, 6.4\%, 9.6\%, 12.8\%, 16\%, 19.2\%, 22.4\%$ . В табл. 3 приведены относительные погрешности для данных значений  $l$  и  $\varphi$ .

Таблица 3. Относительная погрешность  $\epsilon$  при различных объемных долях фибр  $\varphi$  и размерах представительных областей  $l$ .

$l \backslash \varphi$	3.2%	6.4%	9.6%	12.8%	16%	19.2%	22.4%
0.1	0.0219	0.0323	0.0296	0.0324	0.0355	0.0317	0.0290
0.2	0.0233	0.0288	0.0277	0.0271	0.0321	0.0268	0.0227
0.3	0.0229	0.0288	0.0234	0.0253	0.0297	0.0229	0.0193
0.4	0.0228	0.0291	0.0228	0.0239	0.0289	0.0219	0.0176
0.5	0.0223	0.0288	0.0225	0.0229	0.0276	0.0210	0.0170

По результатам проведенных расчетов можно сделать вывод, что относительная погрешность уменьшается при увеличении размера представительной области, но до определенного минимума. Влияние объемной доли фибр на погрешность усредненного решения незначительна. При численном исследовании для рассмотренного диапазона параметров относительная погрешность не превышала 4% и показывала хорошую точность значения эффективного коэффициента.

С целью оценки влияния арматуры в железобетонной конструкции проведен сравнительный анализ упруго-деформированного состояния для бетона с внутренней металлической арматурой и без нее. Анализ был проведен для двух различных наборов параметров, соответствующих бетону СЕМ I 52.5 выполненных при соотношении вода/цемент равному 1/4. Параметры упругости для нового бетона и бетона подверженного разнородному выщелачиванию представлены в табл. 4.

Таблица 4. Коэффициенты упругости использованные при решении задачи для различных видов бетона.

Материал	Модуль Юнга, $E$ ,	Коэф. Пуассона, $\nu$
Сталь	200	0.30
Бетон СЕМ I 52.5	32.7	0.27
Деградирующий бетон	13.7	0.27

По полученным данным был сделан вывод о том, что использование арматуры усиливает устойчивость конструкции к упругим деформациям. Отметим, что

наличие стального каркаса в новом бетоне уменьшает значения перемещения и напряжения под действием внешних поверхностных сил примерно на 10% и 5%, соответственно. А в случае бетона с ухудшенными характеристиками аналогичный вклад составляет порядка 15% и 7%.

В **третьей главе** рассматривается численное моделирование прикладных проблем линейной упругости анизотропного тела. Описывается вычислительный алгоритм решения стационарной задачи линейной упругости анизотропного тела на примере деформации деревянной доски под действием внутренних напряжений возникающих при распиловке древесины. При помощи разработанного вычислительного алгоритма выполняется верификация эмпирически выведенного соотношения для расчета внутренних напряжений Даурской лиственницы, которая составляет значительную часть экспорта древесины Якутии.

В случае ортотропного тела тензор упругости  $\mathbb{C}$ , описывающий связь между тензором деформации и тензором напряжения, может быть переписан в обозначениях Фойгта в следующем виде:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}.$$

Тензор упругости является симметричным и имеет следующие компоненты

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \mu_{at}\mu_{ta}}{\Delta E_t E_a}, & C_{22} &= \frac{1 - \mu_{ar}\mu_{ra}}{\Delta E_r E_a}, & C_{33} &= \frac{1 - \mu_{rt}\mu_{tr}}{\Delta E_r E_t}, \\ C_{12} &= \frac{\mu_{tr} + \mu_{ar}\mu_{ta}}{\Delta E_t E_a}, & C_{13} &= \frac{\mu_{ar} + \mu_{tr}\mu_{at}}{\Delta E_t E_a}, & C_{23} &= \frac{\mu_{at} + \mu_{rt}\mu_{ar}}{\Delta E_r E_a}, \\ C_{44} &= G_{rt}, & C_{55} &= G_{ra}, & C_{66} &= G_{ta}, \end{aligned}$$

где  $E_r, E_t, E_a$  - радиальный, тангенциальный и продольный модули Юнга,  $G_{ij}, \mu_{ij}$  - модули сдвига и коэффициенты Пуассона, соответственно. Таким образом, для ортотропного тела определяется целых 12 упругих постоянных вместо 2 для изотропного. Здесь  $\Delta$  - вспомогательный коэффициент, используемый для сокращения записи, который выражается как

$$\Delta = \frac{1 - \mu_{rt}\mu_{tr} - \mu_{ra}\mu_{ar} - \mu_{ta}\mu_{at} - 2\mu_{tr}\mu_{at}\mu_{ra}}{E_r E_t E_a}.$$

Согласно исследованиям В.Н. Глухих для даурской лиственницы была представлена следующая модель для распределения внутреннего напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_r(r) &= \sigma_{ta} \ln \left( \frac{r}{R} \right), \\ \sigma_t(r) &= \sigma_{ta} \left( 1 + \ln \left( \frac{r}{R} \right) \right), \\ \sigma_a(r) &= \sigma_0 \left( 1 - 7 \frac{r}{R} - 8 \frac{r^{14}}{R^{14}} \right).\end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_{ta}, \sigma_0$  — вспомогательные коэффициенты имеющие определенный порядок, точные значения которых еще предстоит выяснить,  $r$  — расстояние определенной точки от центра дерева и  $R$  — локальный радиус дерева, который меняется от положения точки древесины внутри дерева.

В качестве примера численного решения задачи была рассмотрена деформация доски, расположение которой внутри дерева было параллельно оси роста дерева. Положение доски внутри дерева было смещено относительно центра на величину 20 мм и 27 мм по нормали к пласти и кромке, соответственно.

Для расчетов мы использовали приближенные по порядку значения  $\sigma_0 = 2$  МПа и  $\sigma_{ta} = 0.1$  МПа. При таких значениях было получено распределение перемещения имеющее хорошее согласование с экспериментальными данными.

В **четвертой главе** рассматривается численное моделирование прикладных проблем термоупругости. На примере расчета напряженно-деформированного состояния керамической подложки под действием температурного расширения описывается вычислительный алгоритм численного решения задач термоупругости. На основе разработанного вычислительного алгоритма проводится исследование влияния размеров и вида технологических отверстий на максимальную величину возникающих напряжений с целью минимизации риска возникновения трещин.

Математическая модель термоупругого состояния определяется связанной системой уравнений для перемещения  $\mathbf{u}$  и инкремента температуры  $\theta$  в расчетной области  $\Omega$ :

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) = f. \quad (10)$$

$$-\mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \alpha \operatorname{grad} \theta = 0. \quad (11)$$

Здесь  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $\alpha = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)$ , где  $\alpha_T$  — коэффициент линейного температурного расширения.

Объектом исследования являются керамические подложки с металлизацией, которые используются в производстве светодиодных модулей. В процессе создания керамические подложки подвергаются значительному нагреву, вследствие чего возникают существенные напряжения, достаточные для образования трещин около технологических отверстий.

Для улучшения процесса создания керамических подложек необходимо провести серию испытаний с изменением геометрии или параметров задачи, чтобы в итоге добиться минимизация упругих напряжений. Испытания, естественно, получаются менее затратными при использовании численных методов.

На основе разработанного вычислительного алгоритма были проведены параметрические исследования технологических отверстий с целью минимизации возникающих напряжений. При этом варьировались:

- расстояние технологических отверстий от края подложки;
- диаметр технологических отверстий;
- форма технологических отверстий (форма эллипса).

При изменении расстояния выделена следующая тенденция – чем ближе отверстие к краю подложки, тем больше напряжения и соответственно наоборот чем отверстие дальше от края, тем меньше напряжения. Следовательно, при минимизации возникающих напряжений необходимо сместить технологические отверстия в сторону середины подложки. При вариации диаметра отверстий, было установлено, что чем больше диаметр отверстия тем, больше максимальные напряжения по Мизесу. И, наконец, были исследованы различные формы технологических отверстий при различном соотношении больших и малых полуосей эллипса, отвечающего за форму технологического отверстия. Отмечено, что при вытягивании поперек подложки максимальное значение напряжения по Мизесу увеличивается, а при вытягивании вдоль подложки уменьшается.

По результатам параметрического исследования даны следующие рекомендации по изменению геометрии и расположению технологических отверстий с целью уменьшения напряжения по Мизесу и вытекающему из этого увеличению прочности изделия:

- увеличить расстояние технологических отверстий от края подложки;
- уменьшить диаметр технологических отверстий;
- при возможности поменять форму технологических отверстий на эллиптическую, с большой полуосью лежащей вдоль длинной стороны подложки.

В пятой главе рассматривается численное моделирование прикладных проблем термoporoupryгoпласTичности. Описывается вычислительный алгоритм расчета нелинейной задачи упругости в случае идеальной пластичности без учета упрочнения. На примере расчета напряженно-деформированного состояния основания дома под действием теплообмена с атмосферным воздухом и с домом приводится численное решение задачи термоупругопластичности. Исследуется зависимость величины пластических деформаций грунта от степени теплоизоляции дома.

Рассматривается задача термoporoupryгoсти, которая включает сильную связь между перемещениями  $\mathbf{u}$ , поровым давлением  $p$  и температурой  $T$ . Пренебрегая тепловой конвекцией, гидротермической связью и другими параметрами малой величины, мы получили математическую модель, описываемую системой уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \beta_p \operatorname{grad} p - \beta_T \operatorname{grad} T &= 0, \\ c_p \frac{\partial p}{\partial t} + \beta_p \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div} (k_p \operatorname{grad} p) &= \phi_p(\mathbf{x}, t), \\ (c_T + L\psi'_\delta) \frac{\partial T}{\partial t} + \beta_T \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div} (k_T \operatorname{grad} T) &= \phi_T(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

где,  $\beta_p$  — коэффициент Био,  $\beta_T$  — коэффициент теплового расширения,  $c_p = 1/M$ ,  $M$  — модуль Био,  $c_T$  — удельная теплоемкость,  $L$  — удельная теплота таяния льда,  $k_p$  и  $k_T$  — гидро- и теплопроводность, соответственно,  $\phi_p$  — функция описывающая источники жидкости, а  $\phi_T$  — источники тепла,  $\psi'_\delta$  — функция учета фазового перехода.

Для исследования влияния теплоизоляции дома была решена задача для разных значений коэффициента теплообмена между домом и грунтом  $\alpha_h$ :

- 1 когда нету никакой теплоизоляции между домом и грунтом мы имеем уравнение  $\alpha_h = \alpha_{\text{air}}$ ;
- 2 при наличии некоторой теплоизоляции мы имеем  $\alpha_h = 0.1\alpha_{\text{air}}$ ;
- 3 хорошая теплоизоляция выражена в виде коэффициента теплопроводности равным  $\alpha_h = 0.01\alpha_{\text{air}}$ .

Для каждого случая была решена задача термoporoupryгoпласTичности и линейная задача термoporoupryгoсти для сравнения решений и выделения областей наличия пластических деформаций. Задача была решена в области представленной на рис. 6 для временного промежутка в 2 года с шагом по времени равному одному дню. Были заданы граничные условия атмосферного давления, теплообме-

на грунта с воздухом и домом, граничные условия давления дома и фиксирования левой, правой и нижней границ по соответствующим осям.

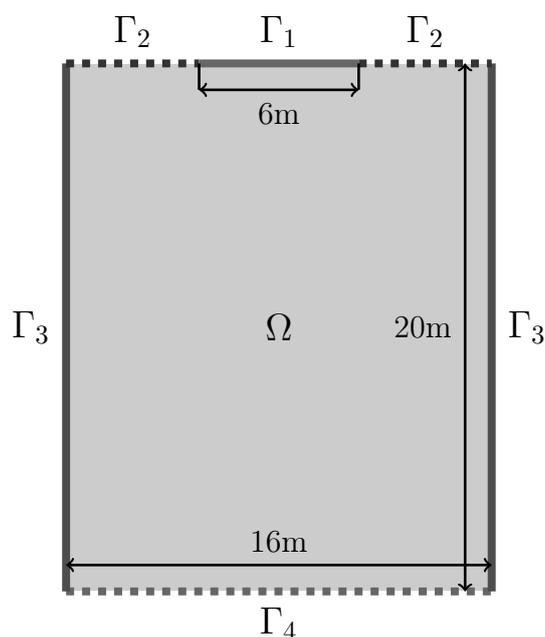


Рис. 6. Полная геометрия грунта с расположением различных границ.

По результатам проведенных результатов отметим, что для случая 2 мы имеем уменьшение значения пластических деформаций и отсутствие таковых для случая 3. Таким образом, мы можем обозначить положительное влияние наличия теплоизоляции между домом и грунтом, посредством сбережения фундамента дома от пластических деформаций, или другими словами, обеспечения устойчивости.

На основе представленного вычислительного алгоритма было разработано прикладное программное обеспечение с графическим интерфейсом для прогнозирования напряженно-деформированного состояния оснований и фундаментов зданий и сооружений.

**Основные результаты работы** посвящены численному исследованию задач расчета напряженно-деформированного состояния твердых тел. Разработана единая вычислительная технология численного решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния для вычислительных систем параллельной архитектуры. Вычислительные алгоритмы отработаны на двумерной и трехмерной модельных задачах с исследованием на масштабируемость для многопроцессорных вычислительных систем при использовании различных связок решателей и предобуславливателей СЛАУ. Основные научные результаты, полученные в работе, формулируются следующим образом:



## Публикации автора по теме диссертации

1. Sivtsev P. V., Vabishchevich P. N., Vasilyeva M. V. Numerical simulation of thermoelasticity problems on high performance computing systems // International Conference on Finite Difference Methods. – Springer, Cham, 2014. – С. 364-370. (Web of Science & Scopus).
2. Сивцев П. В. Численное моделирование задачи упругости железобетонных плит // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. МК Аммосова. – 2015. – №. 4 (48). – С. 64-74.
3. Sivtsev P. V. et al. Numerical analysis of reinforced concrete deep beams // International Conference on Numerical Analysis and Its Applications. – Springer, Cham, 2016. – С. 414-421. (Scopus).
4. Sivtsev P. V. et al. The numerical solution of thermoporoplasticity problems // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2016. – Т. 1773. – №. 1. – С. 110010. (Web of Science & Scopus).
5. Glukhikh V. N., Okhlopkova A. Yu., Sivtsev P. V. Numerical Simulation of Deformations of Softwood Sawn Timber // International Conference on Large-Scale Scientific Computing. – Springer, Cham, 2017. – С. 483-490. (Scopus).
6. Bisong M. S., Sivtsev P. V., Lepov V. V. Numerical Analysis of Stress-Strain State and Crack Propagation in Welded Samples // Solid State Phenomena. – Trans Tech Publications, 2017. – Т. 265. – С. 507-512. (Scopus).
7. Sivtsev P. V., Stepanov S. P. Numerical simulation of stress-strain state of pipeline // AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2017. – Т. 1907. – №. 1. – С. 030040. (Web of Science & Scopus).
8. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ "Программное обеспечение для численного моделирования напряженно-деформированного состояния мерзлых грунтовых оснований" (Колесов А. Е., Сирдитов И. К., Сивцев П. В., Степанов С. П.). № 2017613067 от 10.01.2017 г.

9. Захаров П. Е., Сивцев П.В. Численный расчет эффективного коэффициента в задаче линейной упругости композитного материала // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24. – №. 2. – С. 75-84.
10. Васильева М. В., Захаров П. Е., Сивцев П. В., Спиридонов Д. А. Численное моделирование задач термоупругости для конструкции с внутренним источником // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24. – №. 3. – С. 52-64.
11. Глухих В. Н., Охлопкова А. Ю., Сивцев П. В. Исследование коробления и численное моделирование деформации пиломатериалов из древесины лиственницы даурской под действием начальных напряжений ствола дерева // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. – 2018. – Вып. 222. – С. 188-201.

Подписано в печать 26.04.18 Формат 60x84/16. Гарнитура «Таймс».  
Печ.л. 1.5. Уч.–изд. л. 1.63. Тираж 100 экз. Заказ № 94.  
Издательский дом Северо–Восточного федерального университета,  
677891, г. Якутск, ул. Петровского, 5.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ИД СВФУ